COMPARACION DE ALGUNOS METODOS DE ESTIMACION DEL NUMERO DE CUÑOS ORIGINALES, A PARTIR DE MUESTRAS SIMULADAS

F. X. MORA MAS (Societat Catalana d'Estudis Numismàtics)

1. Introducción.
2. Preparación de las Muestras.
3. Características estadísticas de las muestras.
4. Ordenación de los métodos simples.
5. Verificación de los métodos según la media de los resultados.
6. Verificación integral de algunos métodos según la media de los resultados.
7. Comparación de los métodos según los resultados individuales sobre cada muestra.
8. Conclusiones.

Este trabajo se presentó conjuntamente con el de Madame C. CARCASSONNE, "Tables pour l'estimation par la methode du maximum de vraisemblance du nombre de coins de droit (ou de revers) ayant servi a frapper une emission", y en colaboración.

Ambos trabajos constituyen una extensión de las tareas que sobre el tema de la "estimación del número de cuños originales" se iniciaron en la Table Ronde de París en 1979.

1. INTRODUCCION

Durante la "Table Ronde 1979", celebrada en París en el mes de setiembre, se puso de manifiesto el interés de los numismáticos para conocer el grado de confianza que ofrecen los métodos de estimación del número de cuños originales de una acuñación, a partir de la información estadística contenida en las muestras de monedas antiguas.

Cada método supone unas hipótesis de partida, se apoya en unos principios de razonamiento lógico y establece un procedimiento de desarrollo del razonamiento para alcanzar un resultado. Para cualquiera de los métodos, el resultado sólo es una "estimación" del valor cierto, aunque generalmente es desconocido. Esencialmente, en cada método se trata de obtener la mejor separación posible del determinismo propio de la acuñación, de la aleatoriedad inherente a la formación de la muestra.

Los diversos autores han creado sus métodos con buenas razones de origen; pero la verificación de los métodos debe realizarse independientemente de sus razones fundamentales; sólo así se puede depositar la correspondiente confianza a cada método. Se debe pues recurrir al campo de la aplicación práctica de los métodos, para lo cual se cuenta con dos alternativas posibles: una actuando sobre hallazgos de monedas de acuñaciones reales, y otra actuando sobre muestras simuladas artificialmente.

Cuando se examinan muestras reales nos hallamos con el inconveniente de que, por lo general, desconocemos las características de la acuñación. En algunos casos, poco frecuentes, las monedas llevan marcas de ordenación de los cuños que permiten tener una idea directa bastante exacta del número de cuños originales; sin embargo, siempre desconoceremos el grado de la menor o mayor regularidad en la producción de monedas según los diferentes cuños, que puede afectar notablemente a la estructura estadística de la muestra.

Las muestras elaboradas artificialmente tienen la ventaja de que conocemos necesariamente las características originales de la acuñación simulada. Los resultados obtenidos con los métodos que se apliquen pueden ser comparados con los valores ciertos, ahora conocidos por haberse aplicado en la simulación. Con este procedimiento se pueden verificar los métodos; en primer lugar corresponde examinar los métodos simples; luego se debe trasladar el problema a la simulación bajo condiciones de hipótesis más reales, con el fin de seleccionar y mejorar la metodología en su conjunto.

Calificamos de "normal" a una acuñación cuando la productividad en cantidad de monedas por cuño, según los distintos cuños, tiende a ser sensiblemente igual. Sin embargo, los casos de anormalidad son especialmente probables en las acuñaciones de monedas antiguas, realizadas evidentemente con una menor uniformidad tecnológica.

Así pues, al simple problema estadístico-matemático, propio de las acuñaciones normales, se asocia el factor de la desigual productividad de los cuños. Esta circunstancia destruye el supuesto de la igual probabilidad apriorística de la presencia de los distintos cuños en la muestra.

También la eventual preferencia que los usuarios de las monedas hayan podido tener sobre algunos cuños concretos, originaría un efecto perturbador análogo.

De principio, pues, hemos de distinguir dos grandes grupos de métodos: los "simples" que suponen una igual probabilidad apriorística para la presencia de todos los cuños, y los "especiales" que tienen en consideración la posibilidad de una desigual probabilidad apriorística. A los numismáticos les interesan evidentemente los métodos especiales; sin embargo, difícilmente se pueden resolver los casos especiales si antes no se ha desarrollado satisfactoriamente la metodología para los casos simples.

Este trabajo considera únicamente a los métodos simples para resolver los casos de acuñaciones-muestreo normales, y se ha recurrido a la segunda alternativa de la verificación de los métodos sobre muestras simuladas artificialmente, por la ventaja que representa el conocimiento de las hipótesis originales de la acuñación simulada.

En atención a cuanto se ha expresado en este mismo apartado, para la verificación y comparación de los métodos simples se ha considerado conveniente actuar como sigue:

1, incluir sólo los métodos conformes con la hipótesis de una igual probabilidad apriorística para la presencia de los cuños;

2, anotar las características originales de la acuñación y asegurar, en lo posible, el cumplimiento de la hipótesis de la normalidad

3, ordenación y agrupación de los métodos según sean los principios de sus razonamientos, para facilitar el análisis de la metodología, y

4, atender a la dimensión de la prueba estadística para que los resultados se concreten con tendencias confiables.

Este trabajo debe tomarse como un primer ensayo que nos proporciona unas conclusiones previas; las cuales, eventualmente, podrán ser verificadas con investigaciones más exhaustivas. Pero además, este trabajo nos proporciona unas orientaciones valiosas para llevar a cabo estudios más precisos, completos y adecuados a la realidad del problema.

2. PREPARACION DE LAS MUESTRAS

Las muestras de las supuestas acuñaciones se han obtenido mediante la técnica numérica de la simulación. A través de un computador programado se ha procedido a la generación interna de números aleatorios uniformes (n.a.u.), o sea, números que apriorísticamente se distribuyen según la ley de igual densidad de probabilidad para cualquier punto del campo de variación de la variable.

Pare la generación interna de los n.a.u. se ha empleado una simple relación recurrente que constituye el llamado "método multiplicativo congruente"; en realidad lo que se logra es la generación de números casi-aleatorios, que pueden ser aceptados como aleatorios después de verificar su "uniformidad".

El ganerador de los nn.aa.uu. empleado, con el factor 997 como multiplicador, ha sido verificado con las pruebas de frecuencia y de secuencia ("frequency test" y "serial test") para un campo de extensión superior al necesario para obtener todas las muestras del conjunto. El resultado de la verificación es bastante aceptable, aun cuando no alcanza una plena satisfacción.

En la figura n.º 1 se muestra el detalle de la generación de una de las muestras; corresponde a la 1.ª muestra del grupo I (n = 20 cuños originales; g = 25 monedas), véase la tabla I (1/2).

Siguiendo este mismo procedimiento se ha completado la simulación de cuatro grupos de muestras, correspondiente a cuatro supuestos de acuñación-muestreo normales. En cada grupo se han preparado 10 muestras. En la tabla I se han reunido las muestras obtenidas:

Grupo I: n = 20 cuños originales y g = 25 monedas;
Grupo II: n = 40 cuños originales y g = 25 monedas;
Grupo III: n = 40 cuños originales y g = 50 monedas, y
Grupo IV: n = 80 cuños originales y g = 50 monedas.

3. CARACTERISTICAS ESTADISTICAS DE LAS MUESTRAS

Mediante el proceso estocástico de las cadenas de Markov nos es posible obtener la estadística exacta de la variable "número de cuños distintos en la muestra", para cada uno de los supuestos de acuñación. Obtenidas las cuatro estadísticas, cada una de las muestras puede ser situada sobre el eje de abcisas de la correspondiente estadística teórica.

La estadística de la variable "h", número de cuños distintos en la muestra para el tamaño de muestra de "g" monedas, no obedece a ninguna de las formas estadísticas recogidas en los textos de los manuales habituales (tales como las formas de Gauss-Laplace, Binomial, Poisson, etc.) Según entendemos, la estadística objeto de nuestra cuestión sólo puede ser obtenida a través del proceso estocástico de las cadenas de Markov, en el que se tiene en consideración el árbol completo de las posibilidades de formación de las muestras.

El fundamento para la obtención de esta estadística se muestra en la figura n.° 2, donde se hallan también las expresiones que permiten pasar del vector de probabilidades correspondiente a la muestra de "g-1" ejemplares al vector correspondiente a la muestra de "g" ejemplares. Los cálculos se inician con la muestra de un solo ejemplar, donde el único elemento de probabilidad corresponde a la identificación de un solo cuño al 100%, o sea, prob(h = 1) = 100%.

Mediante el auxilio de un calculador, necesario por el volumen de cálculo que se debe realizar, se puede pasar de la muestra con un ejemplar a la muestra de "g" ejemplares, aplicando iterativamente la expresión que se halla en la figura n.° 2.

Los valores de probabilidades de la variable para los 4 supuestos de acuñación-muestreo normales se han reunido en la tabla II. Las mismas estadísticas se muestran gráficamente en las figuras números 3, 4, 5 y 6 (E-1, E-2, E-3 y E-4 respectivamente).

Sobre cada una de las estadísticas teóricas se han situado las estadísticas experimentales obtenidas con las 10 muestras para cada grupo. Desde luego, el número de muestras es escaso; pero puede observarse como en las respectivas figuras la media de cada grupo de muestras se desvía ligeramente hacia posiciones de menor valor con relación al teórico respectivo; véanse las siguientes diferencias:

grupo I: 13,90 – 14,45 = –0,55 , –3,81%;
grupo II: 18,40 – 18,76 = –0,36 , –1,92%;
grupo III: 28,30 – 28,72 = –0,42 , –1,46%;
grupo IV: 37,00 – 37,35 = –0,35 , –0,94%.

La causa de esta tendencia hacia valores inferiores a los esperados se atribuye a una ligera imperfección del generador de nn.aa.uu. Sin embargo esta circunstancia no constituye problema que merezca más atención, por cuanto todos los métodos se hallarán igualmente afectados.

4. ORDENACION DE LOS METODOS SIMPLES

Los métodos simples que se tienen en consideración en este estudio son los que se hallaron implicados, directa o indirectamente, en el programa de trabajo de la "Table Ronde 1979". Como es obvio, se han excluido los métodos especiales que suponen hipótesis de partida distintas de las normales, y también se han excluido algunos métodos simples que manifiestamente han sido superados (tal es por ejemplo de Brown basado en el número de cuños pares presentes en la muestra, que denominamos método Brown-I). La relación de los métodos considerados figura en la tabla III.

En la tabla III los métodos se presentan ordenados después de haber sido clasificados según los datos que emplean de la información estadística contenida en la muestra. Para la clasificación se tiene en cuenta la estadística observada de las frecuencias de las repeticiones de los cuños, sin proceder a su reducción con relación al número total de cuños distintos observados.

La nomenclatura empleada es la siguiente:

g: número total de monedas (ejemplares) en la muestra;
h: número total de cuños distintos presentes en la muestra;
h(k): frecuencia correspondiente a los cuños cuya presencia se repite "k" veces en la muestra;
n: número total de cuños originales, valor cierto generalmente desconocido;
$\hat{n}$: estimación del número total de cuños originales, que incluye la clase de los cuños ausentes en la muestra.

En calidad de observadores de una muestra bajo situaciones reales, que implica el desconocimiento de la clase de los cuños ausentes, podemos obtener de la estadística de las repeticiones unas características estadísticas; centrando la atención en los momentos ordinarios, no centrados, tenemos los siguientes valores:

m_0 : momento nulo (observado)

$$m_0 = \sum_{k=1}^{g} k^0 . h(k) = h$$

m_1 : momento primero

$$m_1 = \sum_{k=1}^{g} k^1 . h(k) = g$$

m_2 : momento segundo

$$m_2 = \sum_{k=1}^{g} k^2 . h(k)$$

m_a : momento atípico

$$m_a = \sum_{k=1}^{g} y(k) . h(k)$$

y(k) : función de "k" distinta de la potenciación.

Debe tenerse en cuenta que el momento de orden nulo observado en las situaciones reales no coincide con el que resultaría de una observación completa, con la inclusión de la clase de los cuños ausentes.

Como momento atípico se ha considerado genéricamente a todo aquél que se obtiene sustituyendo a la función de potenciación por otra distinta. El método de Brown-II emplea el número de las posibles asociaciones pares entre las monedas dentro de cada clase de repeticiones, en vez de una simple potencia de "k"; el número de asociaciones pares constituye una función de "k" cuya expresión es la correspondiente al número de permutaciones:

$$y(k) = \frac{h(k) \cdot (h(k)-1)}{2}$$

En la figura n.° 7 se muestra la estadística de las repeticiones según se ha observado para una muestra (muestra n.° 1 del grupo I), con los correspondientes valores de las características estadísticas mencionadas.

En la tabla III se relacionan los métodos, los datos base empleados y las correspondientes fórmulas de resolución. En cuanto a los datos, todos los métodos emplean, evidentemente, el momento primero, $m_1 = g$, que es el número de monedas que contiene la muestra; luego utilizan un segundo dato que particulariza al método.

Los cuatro primeros relacionados, Lyon-II, Guilbaud-II, Mora-Mas-I y Carcassonne, emplean como segundo dato el momento nulo observado, $m_0 = h$, número de cuños distintos en la muestra.

Los métodos "Carcassonne" y "Mora-Mas-I" coinciden en cuanto a los principios fundamentales y difieren sólo en el procedimiento; los resultados de ambos coinciden en un sólo valor. El método "Carcassonne" alcanza la solución a través de un teorema de mucho valor, que simplifica extraordinariamente la solución de "máxima verosimilitud" o de "mayor probabilidad de ser cierto". La verificación de ambos métodos se consignarán, en adelante, como si se tratara de un sólo método bajo de denominación de Carcassonne.

Los métodos "Müller" y "Brown-II" abandonan el momento nulo, teóricamente inconsistente, y lo sustituyen por un momento de orden superior al primero; Müller utiliza el momento segundo, y Brown (II) utiliza el momento atípico antes mencionado (número de asociaciones pares).

Los métodos "Good" y "Mora-Mas-II" emplean como segundo dato base las proporciones entre las distintas clases de cuños. En el método de Good se recurre a la proporción del número de cuños singulares con relación a la totalidad de los presentes; mientras de en el segundo se tienen en cuenta las proporciones de todas las clases presentes.

5. VERIFICACION DE LOS METODOS SEGUN LA MEDIA DE LOS RESULTADOS

Se ha procedido a la aplicación sistemática de los distintos métodos relacionados en la tabla III a las muestras simuladas de la tabla I. Cada uno de los métodos proporciona un valor por muestra que es una estimación del valor cierto del número de cuños originales, la cual se hallará más o menos próxima al valor real.

Aun cuando el valor real es necesariamente un número entero, la estimación puede ser expresada con una fracción; incluso esta forma de dar el resultado es más correcta porque nos permite determinar su desviación con más precisión cuando se compara con el valor real. Por lo tanto, en todos los casos que ha sido posible se ha optado en dar los resultados con dos decimales.

Los resultados de la aplicación de los métodos figuran en la tabla IV (recordamos que los del método Mora-Mas-I coinciden con los del método Carcassonne), parte superior de la misma.

El número de los cuños distintos que se manifiestan en una muestra constituye un indicador de la mayor o menor regularidad en la formación aleatoria de la misma muestra, según se aproxime más o menos al valor más probable. Tomando pues a esta variable "número de cuños distintos" asociada a la "estimación del número de cuños originales", ha sido posible la presentación bidimensional de los resultados. En la figura n.° 8 se muestra un ejemplo de esta representación correspondiente a los resultados obtenidos con el método Brown-II aplicado a las muestras del grupo I.

En este trabajo se ha supuesto una regresión lineal para tener una simple idea de la sensibilidad de los métodos a las distorsiones de la aleatoriedad; sin embargo, la verdadera regresión podría ser muy distinta de la lineal. Téngase en cuenta además, que los métodos cuyo dato base es el número de los cuños distintos les corresponde un coeficiente de correlación elevado, por evidente naturaleza del método; pero el coeficiente de correlación no sirve para seleccionar la bondad del método.

Así pues, para cada método se han obtenido un conjunto de características estadísticas propias de la aplicación del mismo, las cuales figuran en la tabla IV, parte inferior y son las siguientes:

1) "media"' de los valores de las estimaciones del número de cuños originales, obtenidos con las muestras del mismo grupo;

2) "desv. típica", desviación típica del mismo conjunto de valores;

3) "regr. pend.", pendiente de la recta de regresión de la estimación con relación al número de cuños distintos;

4) "ord. origen", ordenada en el origen del eje de abcisas de la misma recta de regresión; y

5) "correlación", coeficiente de correlación de la recta de regresión anterior.

Puede comprobarse como la media de las 10 estimaciones tiene una buena aproximación al valor real para todos los métodos, especialmente para los de "Good", "Guilbaud-II" y "Lyon-II"; la media más distanciada corresponde al método "Mora-Mas-II".

También se puede comprobar la excesiva sensibilidad de todos los métodos con relación a las desviaciones de las muestras respecto a la tendencia media. La sensibilidad está representada por la pendiente de la recta de regresión; cuanto más baja sea la pendiente tanto mejor es el método. Los de menos pendiente son los de "Brown-II" (grupo I y IV), "Mora-Mas-II" (grupo II) y "Good" (grupo III); sin embargo, no existe una clara diferenciación en este sentido.

En resumen podemos formular las siguientes conclusiones sobre este apartado:

1.ª) Todos los métodos aportan resultados medios muy próximos al valor real;
2.ª) Todos son muy sensibles a las desviaciones de aleatoriedad de las muestras;
3.ª) Los resultados son muy similares; para establecer una selección haría falta realizar la aplicación sobre un mayor número de muestras simuladas.

6. VERIFICACION INTEGRAL DE ALGUNOS METODOS SEGUN LA MEDIA DE LOS RESULTADOS

Los métodos de estimación que se basan en el número de cuños distintos en la muestra son susceptibles de una verificación completa; tales métodos son los "Lyon-II", "Guilbaud-II" y "Carcassonne" (incluyendo el "Mora-Mas-I").

Con la aplicación de los procesos estocásticos de Markov es posible conocer la estadística del "número de cuños distintos" para cada hipótesis del número de cuños originales; ello representa una visión ergódica de todas las muestras posibles. Con este recurso queda marginada la necesidad de la simulación de un número grande de muestras. Las estadísticas en cuestión son las que se ofrecen en la tabla II.

En la tabla V se reune el detalle y los resultados de esta verificación integral. Para cada uno de los grupos, hipótesis de acuñación, se han hallado las correspondientes estimaciones para cada valor de la variable "h"; habida cuenta de las probabilidades "p(h)" de las estadísticas mencionadas se puede componer la media y otros momentos.

Los resultados son (media y desviación de la media):

Grupo I	acuñación de n = 20 y muestras de g = 25		
	LYON-II	21,074	+1,074
	GUILBAUD-II	20,740	+0,740
	CARCASSONNE	20,054	+0,054
Grupo II	acuñación de n = 40 y muestras de g = 25		
	LYON-II	45,947	+5,947
	GUILBAUD-II	44,482	+4,482
	CARCASSONNE	43,929	+3,929
Grupo III	acuñación de n = 40 y muestras de g = 50		
	LYON-II	41,056	+1,056
	GUILBAUD-II	40,918	+0,918
	CARCASSONNE	40,036	+0,036
Grupo IV	acuñación de n = 80 y muestras de g = 50		
	LYON-II	85,125	+5,125
	GUILBAUD-II	83,850	+3,850
	CARCASSONNE	83,233	+3,233

Se observa que la aproximación de la media obtenida con el método de "Carcassonne" supera indiscutiblemente a la de los otros dos. Sin embargo, los resultados son muy similares y el paralelismo de los mismos es extraordinariamente grande; cuestión que se puede comprobar observando los resultados en la tabla V. Incluso se puede llegar a sospechar que los principios de los métodos de "Lyon-II" y "Guilbaud-II" coincidan con los de "Carcassonne", diferenciándose únicamente en el procedimiento de resolución empleando fórmulas aproximadas.

7. COMPARACION DE LOS METODOS SEGUN LOS RESULTADOS INDIVIDUALES SOBRE CADA MUESTRA

Cuando se procede a la aplicación de uno cualquiera de los métodos en la resolución de un problema real, nos hallamos ante la circunstancia de que tenemos una sola muestra, aparte del desconocimiento de si se verifican las hipótesis normales. Por lo tanto, consideramos oportuno comparar el comportamiento de los métodos tomando los resultados individuales en vez de las medias.

Recordamos que en la simulación realizada se ha procurado el cumplimiento de las hipótesis normales, especialmente la de igual productividad de los cuños.

Cada muestra representa una oportunidad para la aplicación de los métodos simples (para hipótesis normales), y en cada ocasión podemos comprobar cuál de los resultados se haya acercado más al valor real. Haciendo lo propio con todas las muestras, 40 en total, se pueden contabilizar las frecuencias para cada uno de los métodos en proporcionar la mejor aproximación.

Esta comparación se ha hecho tomando el mínimo valor absoluto de las desviaciones; primero tomando los métodos dos a dos y luego tomando simultáneamente los 7 métodos distintos. Las desviaciones absolutas de los resultados con relación a los valores ciertos se han reunido en la tabla VI.

De la primera operación no ha sido posible establecer una distinción favorable para alguno o algunos de los métodos, al compararlos dos a dos. Sin embargo, cuando se consideran simultáneamente se observa un resultado muy significativo; en la misma tabla VI se han señalado, dentro de cada línea, las desviaciones más pequeñas y el resultado obtenido ha sido el siguiente:

BROWN-II	14 veces,
GOOD	12
MORA-MAS-II	12
MÜLLER (")	1
CARCASSONNE	1
GUILBAUD-II	0
LYON-II	0

Nota ("): Los resultados del método MÜLLER se hallan expresados en números enteros; su resolución con decimales podría variar algo las frecuencias indicadas.

De este resultado se deduce en primera apreciación, que en las aplicaciones reales sobre acuñaciones-muestreo normales los métodos basados en las proporciones de las distintas clases de repetición de los cuños (Good y Mora-Mas-II) y el basado en el momento atípico de las asociaciones pares (Brown-II) se aproximan más al valor cierto con más frecuencia que los métodos basados en el número de cuños distintos. Y entre los tres métodos mencionados, con los datos obtenidos, no es posible establecer una selección significativa.

8. CONCLUSIONES

Durante el desarrollo de este trabajo, según ha sido expuesto, se han dado ya algunas conclusiones mientras que otras también han quedado patentes; sin embargo consideramos propio proceder a su recopilación final, como sigue:

1) De los métodos simples, propios para las muestras apriorísticamente normales, basados en el número de cuños distintos, entendemos que el método de Carcassonne proporciona la respuesta matemática más correcta, justificada por un sólido teorema.

2) En este trabajo, no se ha analizado la eficacia de los procedimientos simples cuando se aplican sobre muestras apriorísticamente anormales, o sea, con cuños de distinta productividad. Convendría una extensión del trabajo en este sentido; ya que de ello se podría deducir una distinta evaluación de los métodos simples.

3) El método de Brown (Brown-II), dado que proporciona resultados muy buenos, debería ser analizado de nuevo con mayor profundidad para poner en evidencia los principios de su fundamento.

4) También el método de Good debería ser analizado en cuanto a sus principios fundamentales. Los métodos basados en la distribución de los cuños según las distintas clases de repeticiones, ofrecen mayores posibilidades para el desarrollo de mejoras metodológicas en el campo de las aplicaciones reales. Conviene pues centrar sobre estos métodos los esfuerzos para conseguir un procedimiento genérico que supere en lo posible a la actual metodología.

5) Dado que en la realidad, al problema de la aleatoriedad del muestreo se asocia la cuestión ineludible de la desigual productividad de los cuños, con la particularidad de que se desconoce el grado de esta desigualdad, conviene tener una medida de la verosimilitud de la estructura estadística de las muestras. A través del fraccionamiento analítico de las muestras se podrá tener una idea de la distribución de distintos niveles de uniformidad de productividad de los cuños; luego se podrá recurrir a los métodos simples según corresponda. La primera parte de esta tarea podrá ser desarrollada gracias al cálculo de la característica estadística "ji-cuadrado" que proporciona el método de "la mínima ji-cuadrado" (Mora-Mas-II).

6) Entendemos que lo más propio para un próximo trabajo es el desarrollo de la tarea sobre un conjunto de muestras simuladas apriorísticamente anormales, con niveles de productividad cuidadosamente elegidos, con el intento de conseguir un procedimiento genérico. Luego el procedimiento podría ser propuesto a la satisfacción de los numismáticos a través de aplicaciones comparativas sobre muestras reales.

Anexo I

REFERENCIAS DE ORIGEN DE LOS METODOS

1. LYON-II. "Tabla Ronde 1979"; fórmula facilitada por el Dr. Carter. Se distingue con el calificativo "II" para diferenciarlo de la presentación del autor en "Numismatic Circular" de September 1965.

2. GUILBAUD II. "Table Ronde 1979"; fórmula facilitada por el Dr. Carter. Se distingue con el calificativo "II" para diferenciarlo de otro estudio del autor en el "Bulletin de la Société Française de Numismatique" de Juillet 1974.

3. MORA-MAS-I. Método publicado en "Acta Numismática VII" de 1977. Resolución por procesos estocásticos.

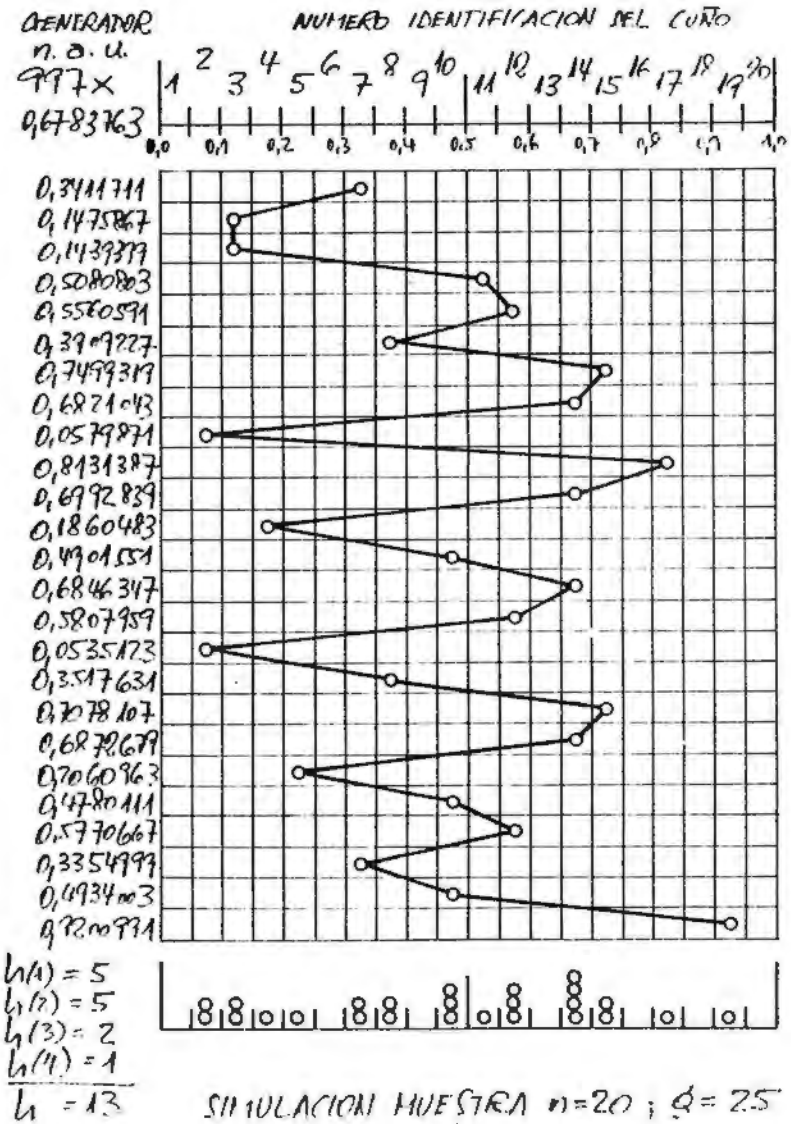
4. CARCASSONNE. Fórmula comunicada por el propio autor, Mad. C. Carcassonne, que lo denomina "Método de la máxima verosimilitud".

5. MÜLLER. Método basado en los momentos primero y segundo; para hallar el resultado se emplea un gráfico. Los resultados utilizados en este estudio han sido facilitados por el propio autor.

6. BROWN-II. "Table Ronde 1979". Se distingue con el calificativo "II" para diferenciarlo del método referido en "The British Numismatic Journal, XXVIII", 1955-57, basado en el número de cuños pares.

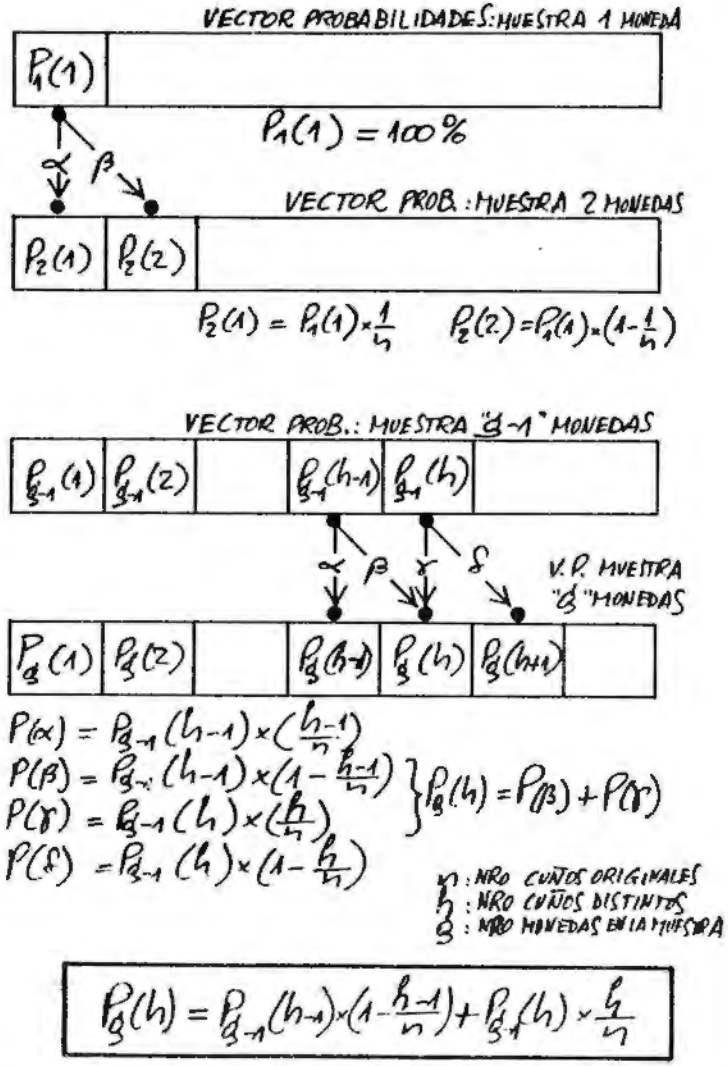
7. GOOD. "Table Ronde 1979"; fórmula facilitada por el Dr. Carter.

8. MORA-MAS-II. Método presentado por el autor en la "Table Ronde 1979"; denominado también "Método de la mínima ji-cuadrado".



SIMULACION MUESTRA n=20 ; ϕ= 2.5

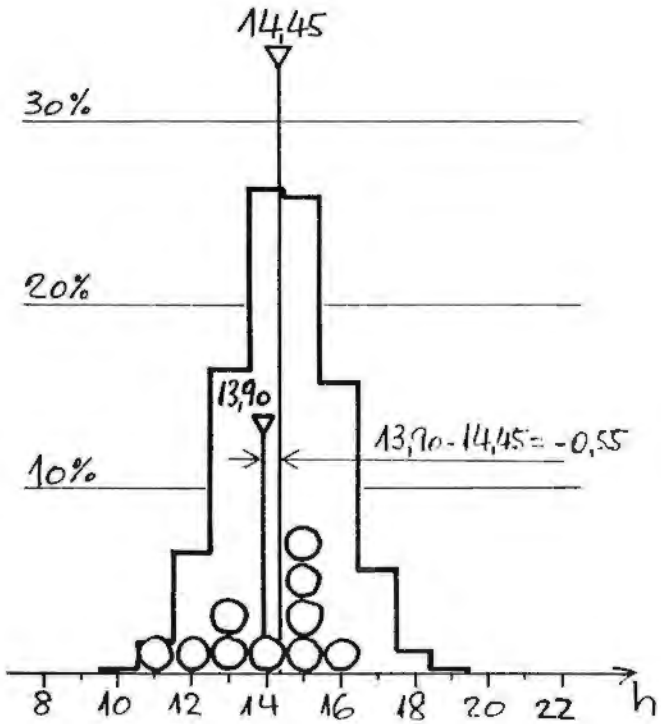
Figura nº1



$$P_g(h) = P_{g-1}(h-1)\times\left(1-\frac{h-1}{n}\right) + P_{g-1}(h)\times\frac{h}{n}$$

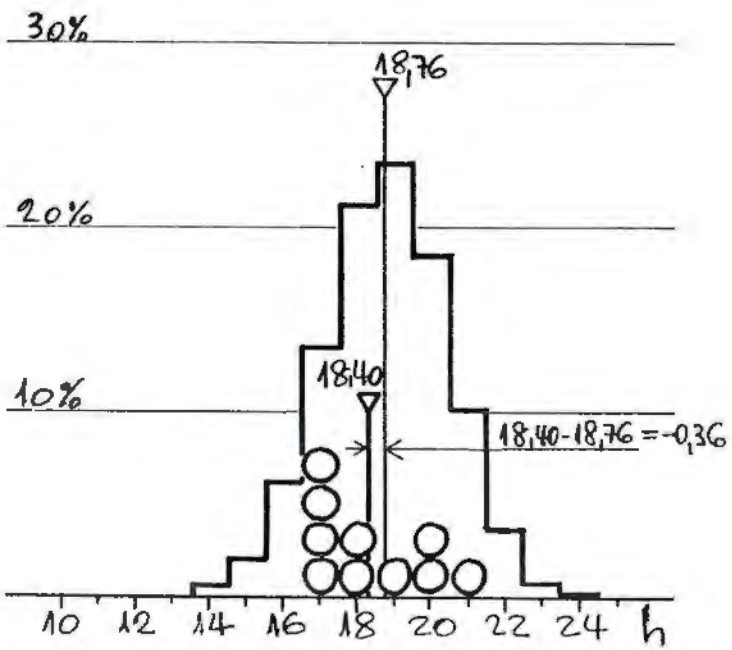
PROCESO PARA OBTENER LA ESTADISTICA DEL NRO. CUÑOS DISTINTOS

Figura nº2



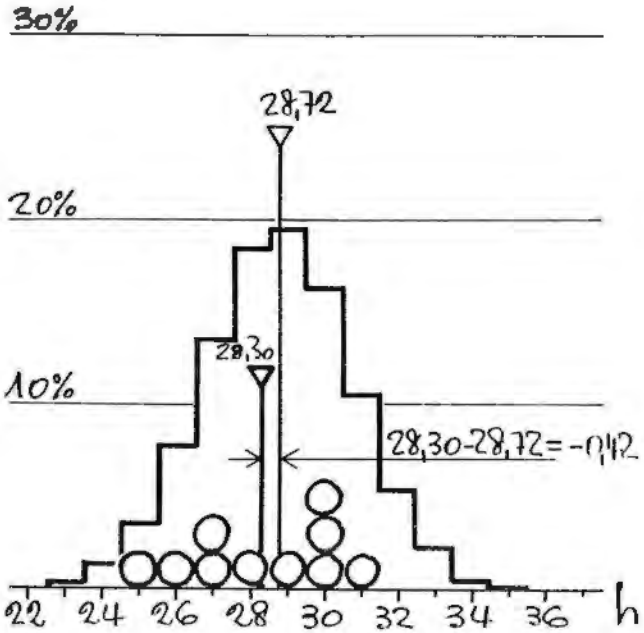
ESTADISTICA DEL NUMERO DE CUÑOS DISTINTOS
$n = 20 \quad \sigma = 25$

Figura nº 3



ESTADISTICA DEL NUMERO DE CUÑOS DISTINTOS
$n = 40 \quad \sigma = 25$

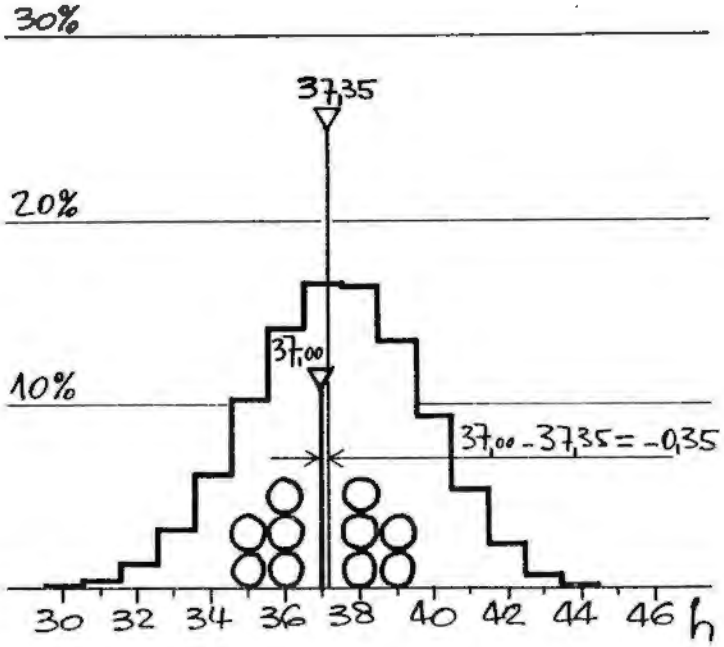
Figura nº 4



ESTADISTICA DEL NUMERO DE CUÑOS DISTINTOS

$n = 40 \quad \xi = 50$

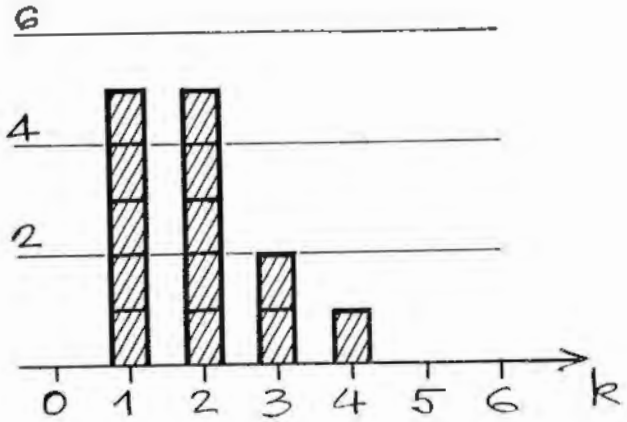
Figura nº 5



ESTADISTICA DEL NUMERO DE CUÑOS DISTINTOS

$n = 80 \quad \xi = 50$

Figura nº 6



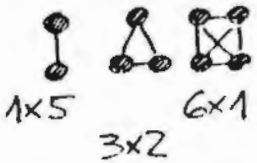
$m_0 = 5+5+2+1 = 13$

$m_1 = 5+10+6+4 = 25$

$m_2 = 5+20+18+16 = 59$

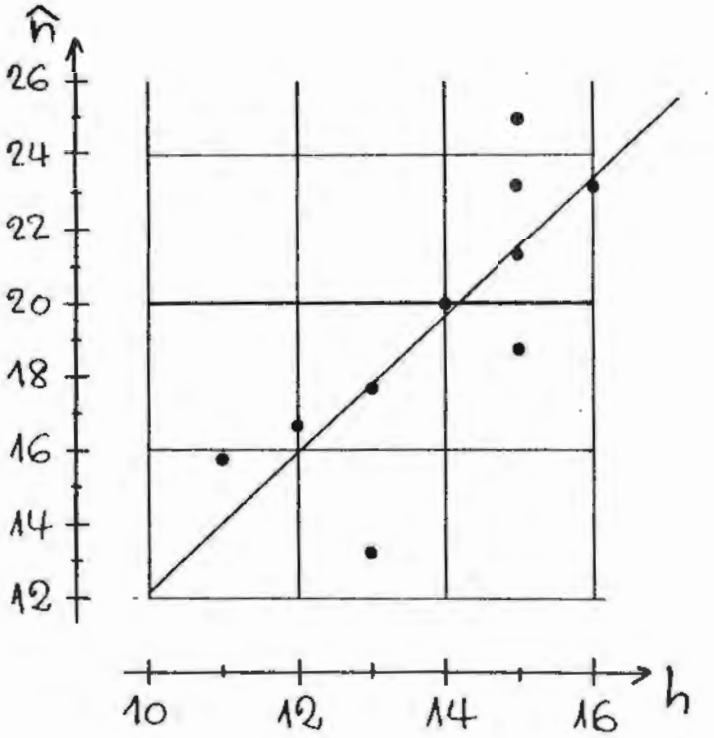
$m_a = 0+10+6+6 = 22$

[a: asociaciones pares]



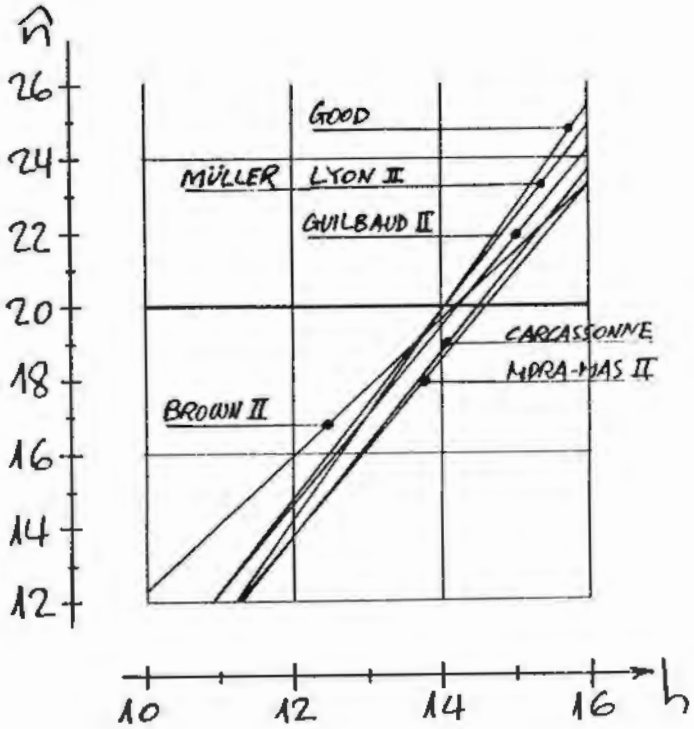
ESTADISTICA DE LAS REPETICIONES - OBSERVACION LIMITADA - MUESTRA FIG1 Y CARACTERISTICAS EST.

Figura nº 7



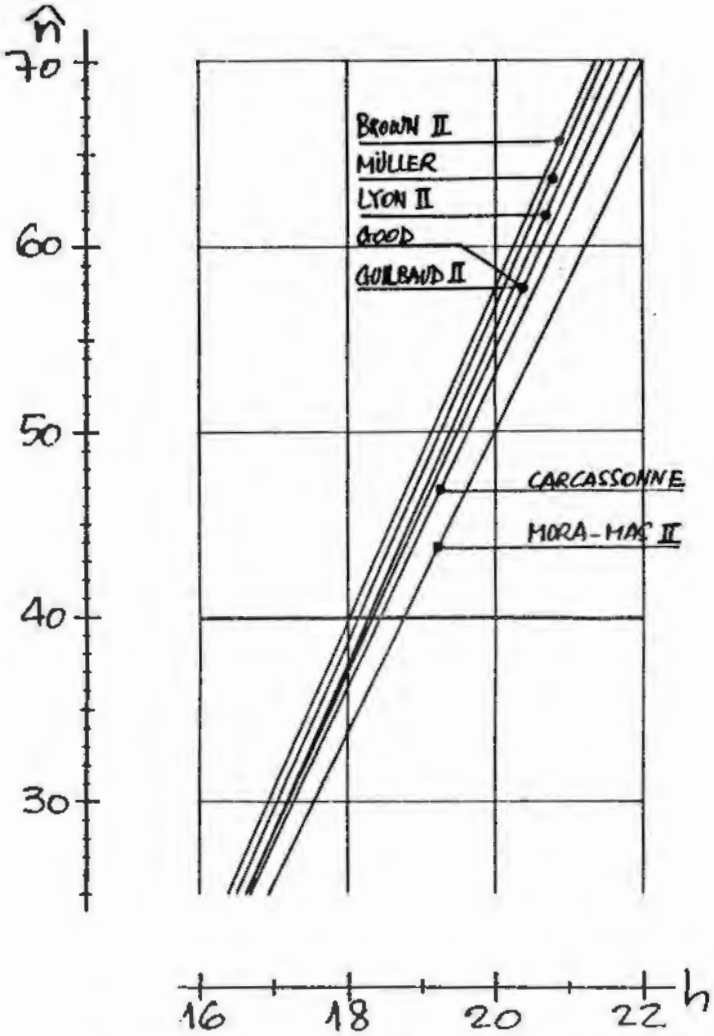
RECTA DE REGRESION $\hat{n} - h$ DE LA APLICACION DEL METODO BROWN - II

Figura nº 8



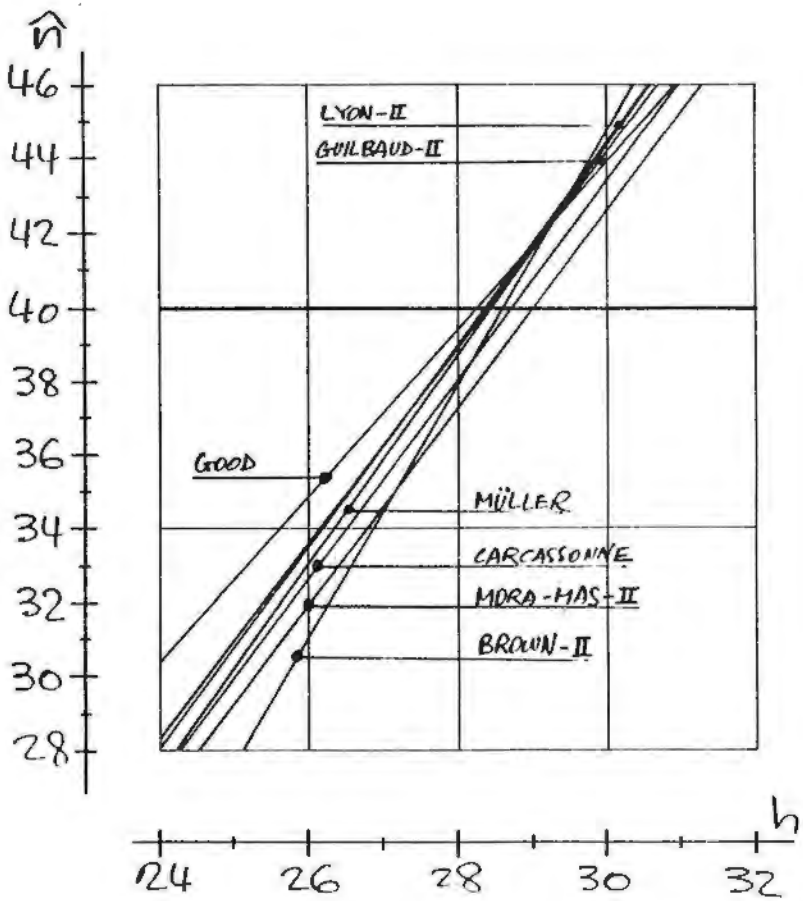
RECTAS DE REGRESION - GRUPO I

Figura nº 9



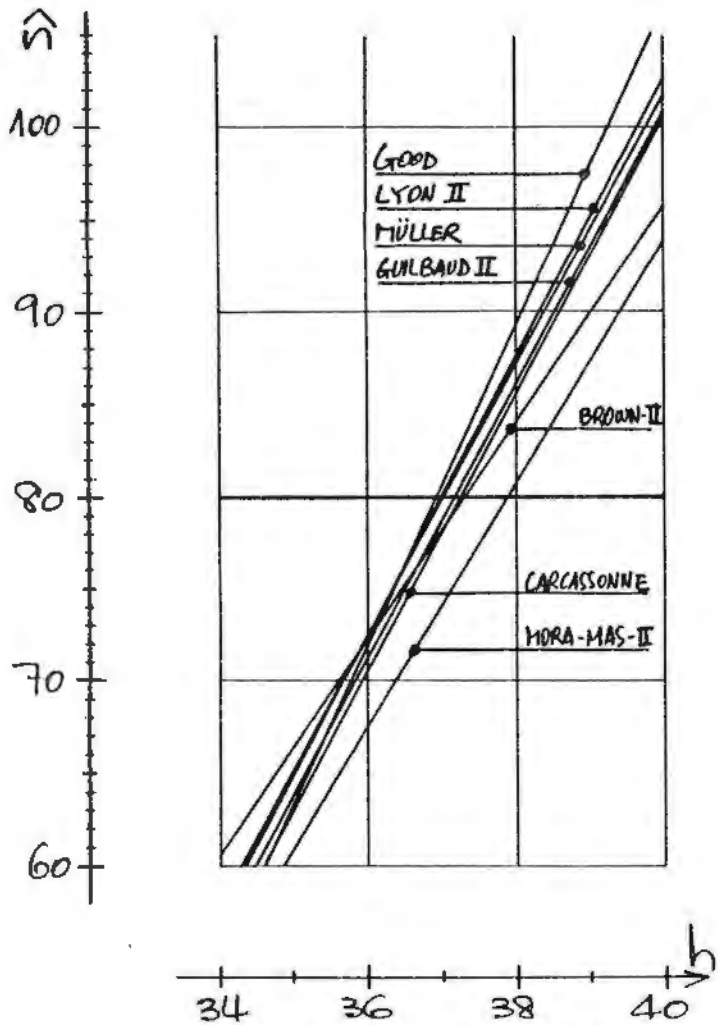
RECTAS DE REGRESION GRUPO II

Figura nº 10



RECTAS DE REGRESION - GRUPO III

Figura nº 11



RECTAS DE REGRESION - GRUPO IV

Figura nº 12

TABLA I (1/2) .- MUESTRAS SIMULADAS.

GRUPO I : n=20 CUÑOS ORIGINALES ; g=25 MONEDAS

n.a.u.	h(1)	h(2)	h(3)	h(4)	h(5)	h(6)	h
0,6783763	5	5	2	1	-	-	13
0,9200991	2	4	5	-	-	-	11
0,9216987	7	6	2	-	-	-	15
0,4466759	9	2	4	-	-	-	15
0,9969763	7	7	0	1	-	-	15
0,3802991	6	5	1	0	0	1	13
0,2530987	10	1	3	1	-	-	15
0,0364759	6	6	1	1	-	-	14
0,5155763	4	3	5	-	-	-	12
0,2404991	10	4	1	1	-	-	16

GRUPO II : n=40 CUÑOS ORIGINALES ; g=25 MONEDAS

n.a.u.	h(1)	h(2)	h(3)	h(4)	h(5)	h(6)	h
0,3844987	17	4	-	-	-	-	21
0,2262759	16	3	1	-	-	-	20
0,2341763	9	8	-	-	-	-	17
0,5006991	12	5	1	-	-	-	18
0,3158987	15	5	-	-	-	-	20
0,0160759	9	8	-	-	-	-	17
0,1527763	14	4	1	-	-	-	19
0,1608991	10	6	1	-	-	-	17
0,0472987	13	4	0	1	-	-	18
0,4058759	12	3	1	1	-	-	17

n.a.u. : número aleatorio uniforme inicial

TABLA I (2/2) .- MUESTRAS SIMULADAS (continuación).

GRUPO III : n=40 CUÑOS ORIGINALES ; g=50 MONEDAS

n.a.u.	h(1)	h(2)	h(3)	h(4)	h(5)	h(6)	h
0,2713763	16	10	2	2	-	-	30
0,7586987	15	11	3	1	-	-	30
0,5899763	16	7	4	2	-	-	29
0,9100987	14	5	4	1	2	-	26
0,1085763	13	14	3	-	-	-	30
0,0414987	11	6	5	3	-	-	25
0,8271763	18	10	1	1	1	-	31
0,9728987	13	8	4	1	1	-	27
0,7457763	14	8	4	2	-	-	28
0,7042987	14	8	3	0	1	1	27

GRUPO IV : n=80 CUÑOS ORIGINALES ; g=50 MONEDAS

n.a.u.	h(1)	h(2)	h(3)	h(4)	h(5)	h(6)	h
0,8643763	21	13	1	-	-	-	35
0,2356987	31	6	1	1	-	-	39
0,1829763	26	7	2	1	-	-	36
0,5670987	28	8	2	-	-	-	38
0,7015763	24	11	0	1	-	-	36
0,6984987	28	8	2	-	-	-	38
0,4201763	29	9	1	-	-	-	39
0,6298987	30	4	4	-	-	-	38
0,3387763	23	9	3	-	-	-	35
0,3612987	26	7	2	1	-	-	36

n.a.u. : número aleatorio uniforme inicial

TABLA II (1/2) .- ESTADISTICAS DE LA VARIABLE "NUMERO DE CUÑOS DISTINTOS".

E-1 : n=20 CUÑOS ORIGINALES ; g=25 MONEDAS

h	p(h)	$\sum^h p(x)$
9	0,02 %	0,02 %
10	0,24	0,26
11	1,61	1,87
12	6,51	8,38
13	16,47	24,85
14	26,14	50,99
15	25,98	76,97
16	15,91	92,88
17	5,81	98,69
18	1,19	99,87
19	0,12	100

media:

$\bar{h}$ = 14,45

desviación típica:

s = 1,43

E-2 : n=40 CUÑOS ORIGINALES ; g=25 MONEDAS

h	p(h)	$\sum^h p(x)$
12	0,01 %	0,01 %
13	0,08	0,09
14	0,47	0,56
15	2,01	2,57
16	6,15	8,72
17	13,47	22,19
18	21,12	43,31
19	23,58	66,89
20	18,53	85,42
21	10,04	95,46
22	3,62	99,08
23	0,82	99,90
24	0,10	100

media:

$\bar{h}$ = 18,76

desviación típica:

s = 1,67

TABLA II (2/2) .- ESTADISTICAS DE LA VARIABLE "NUMERO DE CUÑOS DISTINTOS".
(cont.)

E-3 : n=40 CUÑOS ORIGINALES ; g=50 MONEDAS

h	p(h)	$\sum^h p(x)$
21	0,01 %	0,01 %
22	0,09	0,10
23	0,38	0,48
24	1,34	1,82
25	3,67	5,49
26	7,95	13,44
27	13,59	27,03
28	18,36	45,39
29	19,52	64,91
30	16,29	81,20
31	10,62	91,82
32	5,35	97,17
33	2,07	99,24
34	0,61	99,85
35	0,13	99,98
36	0,02	100

media:

$\bar{h}$ = 28,72

desviación típica:

s = 2,02

E-4 : n=80 CUÑOS ORIGINALES ; g=50 MONEDAS

h	p(h)	$\sum^h p(x)$
28	0,01 %	0,01 %
29	0,04	0,05
30	0,15	0,20
31	0,49	0,69
32	1,36	2,05
33	3,14	5,19
34	6,15	11,34
35	10,16	21,50
36	14,15	35,65
37	16,59	52,24
38	16,32	68,56
39	13,42	81,98
40	9,18	91,16
41	5,19	96,35
42	2,41	98,76
43	0,90	99,66
44	0,27	99,93
45	0,06	99,99
46	0,01	100

media:

$\bar{h}$ = 37,35

desviación típica:

s = 2,36

TABLA III.- METODOS SIMPLES PARA LA ESTIMACION DEL NUMERO DE CUÑOS ORIGINALES - FORMULAS. - - - - - - - -

METODO	DATOS (base)	FORMULA
1 LYON-II	m_1 m_0	$\frac{h}{s}\cdot\frac{s}{\hat{n}}+e^{-\frac{s}{\hat{n}}}-1=0$
2 GUILBAUD-II	m_1 m_0	$\hat{n}=\frac{s(s-1)}{2.(s-h)}-\frac{(s-2)}{3}-\frac{(s-h)}{18}$
3 MORA-MAS-I	m_1 m_0	$\hat{n}$ (max. prob. Bayes) proceso estocástico
4 CARCASSONNE	m_1 m_0	$\hat{n}$ (max. verosimilitud) $\frac{s}{\hat{n}}-\sum_{k=n-d+1}^{k=\hat{n}}\frac{1}{k}=0$
5 MÜLLER	m_1 m_2	$D=(h.m_2-m_1)/h$ $\hat{n}=f(D,h)$ (gráfico)
6 BROWN-II	m_1 m_a	$\hat{n}=\frac{s.(s-1)}{2.m_a}$ (m_a: enlace, pares)
7 GOOD	m_1 prop.$[h(1),\cdot h]$	$\hat{n}=\frac{s.h}{s-h(1)}$
8 MORA-MAS-II	m_1 prop.$[h(1),h(2),\cdot h(k)]$	$\sum_{k=1}^{k=s}\frac{[h(k)-z(k)]^2}{z(k)}=min.$ $z(k)=E_{\hat{n}}[h(k)]$

véase el anexo I: "Referencias de origen de los métodos".

TABLA IV (1/4) RESULTADOS DE LA APLICACION DE LOS METODOS - MUESTRAS DEL GRUPO I.

Método:	Lyon-II	Guilbaud-II	Carcassonne	Müller	Brown-II	Good	Mora-Mas-II
h=13	16,80	16,67	15,91	17	17,65	16,25	16,19
11	12,84	12,98	12,08	13	15,79	11,96	12,36
15	22,21	21,78	21,11	23	25,00	20,83	21,20
15	22,21	21,78	21,11	22	21,43	23,44	20,55
15	22,21	21,78	21,11	22	23,08	20,83	20,55
13	16,80	16,67	15,91	17	13,04	17,11	14,76
15	22,21	21,78	21,11	22	18,75	25,00	21,20
14	19,27	18,99	18,31	19	20,00	18,42	18,31
12	14,69	14,69	13,88	15	16,67	14,29	13,76
16	25,77	25,17	24,56	26	23,08	26,67	23,57
media:	19,50	19,23	18,51	19,60	19,45	19,48	18,25
desv. tipica:	4,09	3,86	3,94	4,06	3,76	4,74	3,76
regr. pend.:	2,55	2,40	2,46	2,52	1,85	2,84	2,33
ord. origen:	-15,94	-14,17	-15,63	-15,35	-6,33	-20,03	-14,13
correlación:	0,9934	0,9929	0,9935	0,9881	0,7865	0,9568	0,9868

TABLA IV (2/4) RESULTADOS DE LA APLICACION DE LOS METODOS - MUESTRAS DEL GRUPO II.

Método:	Lyon-II	Guilbaud-II	Carcassonne	Müller	Brown-II	Good	Mora-Mas-II
h=21	69,55	67,11	66,60	71	75,00	65,63	62,29
20	53,86	52,06	51,53	54	50,00	55,56	49,26
17	30,20	29,39	28,80	31	37,50	26,56	26,75
18	35,86	34,80	34,24	36	37,50	34,62	34,12
20	53,86	52,06	51,53	55	60,00	50,00	47,45
17	30,20	29,39	28,80	31	37,50	26,56	26,75
19	43,38	42,00	41,46	44	42,86	43,18	41,12
17	30,20	29,39	28,80	31	33,33	28,33	28,28
18	35,86	34,80	34,24	35	30,00	37,50	29,28
17	30,20	29,39	28,80	30	25,00	32,69	26,75
media:	41,32	40,04	39,48	41,80	42,86	40,06	37,21
desv. tipica:	13,62	13,06	13,09	13,94	15,05	13,31	12,36
regr. pend.:	8,89	8,52	8,54	9,06	8,97	8,67	8,04
ord. origen:	-122,30	-116,77	-117,70	-124,88	-122,24	-119,40	-110,77
correlación:	0,9828	0,9827	0,9828	0,9782	0,8975	0,9801	0,9797

TABLA IV (3/4) RESULTADOS DE LA APLICACION DE LOS METODOS - MUESTRAS DEL GRUPO III.

Método:	Lyon-II	Guilbaud-II	Carcassonne	Müller	Brown-II	Good	Mora-Mas-II
h=30	44,40	44,14	43,32	44	43,75	44,12	42,59
30	44,40	44,14	43,32	45	47,12	42,86	43,26
29	41,33	41,17	40,30	41	39,52	42,65	40,28
26	33,58	33,71	32,71	33	28,59	36,11	32,02
30	44,40	44,14	43,32	45	53,26	40,54	42,59
25	31,39	31,61	30,56	31	31,41	32,05	30,51
31	47,78	47,42	46,64	47	42,24	48,44	44,94
27	35,94	35,98	35,01	36	34,03	36,49	34,64
28	38,53	38,46	37,56	39	38,28	38,89	37,40
27	35,94	35,98	35,01	35	29,17	37,50	32,51
media:	39,77	39,68	38,78	39,60	38,74	39,97	38,07
desv. tipica:	5,48	5,29	5,38	5,64	8,09	4,74	5,34
regr. pend.:	2,73	2,63	2,68	2,80	3,43	2,24	2,63
ord. origen:	-37,49	-34,83	-37,03	-39,73	-58,22	-23,34	-36,43
correlación:	0,9976	0,9975	0,9976	0,9953	0,8476	0,9461	0,9871

TABLA IV (4/4) RESULTADOS DE LA APLICACION DE LOS METODOS - MUESTRAS DEL GRUPO IV.

Método:	Lyon-II	Guilbaud-II	Carcassonne	Müller	Brown-II	Good	Mora-Mas-II
h=35	65,67	64,83	64,17	67	76,56	60,34	61,69
39	96,28	94,75	94,17	94	81,67	102,63	81,65
36	71,70	70,72	70,08	71	64,47	75,00	67,59
38	86,74	85,42	84,82	87	87,50	86,36	83,28
36	71,70	70,72	70,08	72	72,06	69,23	64,31
38	86,74	85,42	84,82	87	87,50	86,36	83,28
39	96,28	84,75	94,17	97	102,08	92,86	92,27
38	86,74	85,42	84,82	85	76,56	95,00	76,33
35	65,67	64,83	64,17	66	68,06	64,81	62,50
36	71,70	70,72	70,08	71	64,47	75,00	67,59
media:	79,92	78,76	78,14	79,70	78,09	80,76	74,05
desv. tipica:	11,94	11,67	11,70	11,54	11,92	13,99	10,70
regr. pend.:	7,62	7,44	7,46	7,32	5,86	8,60	6,49
ord. origen:	-201,88	-196,69	-198,05	-191,07	-138,56	-237,39	-166,22
correlación:	0,9971	0,9971	0,9971	0,9917	0,7682	0,9611	0,9491

TABLA V (1/2) CALCULO DE LA MEDIA ERGODICA DE LOS RESULTADOS DE ALGUNOS METODOS.

E-1) n=20 cuños originales, g=25 monedas

		LYON-II		GUILBAUD-II		CARCASSONNE	
h	p(h)	$\hat{n}$	$\hat{n}$.p(h)	$\hat{n}$	$\hat{n}$.p(h)	$\hat{n}$	$\hat{n}$.p(h)
9	0,0002	9,78	0,002	10,19	0,002	9,08	0,002
10	0,0024	11,22	0,027	11,50	0,028	10,63	0,026
11	0,0161	12,84	0,207	12,98	0,209	12,08	0,194
12	0,0651	14,69	0,956	14,69	0,956	13,88	0,904
13	0,1647	16,80	2,767	16,67	2,746	15,91	2,620
14	0,2614	19,27	5,037	18,99	4,964	18,31	4,786
15	0,2598	22,11	5,744	21,78	5,658	21,11	5,484
16	0,1591	25,77	4,100	25,17	4,005	24,56	3,907
17	0,0581	30,20	1,755	29,39	1,708	28,80	1,673
18	0,0119	35,86	0,427	34,80	0,414	34,24	0,407
19	0,0012	43,38	0,052	42,00	0,050	41,46	0,050
media:			21,074		20,740		20,054
desv. tipica:			4,437		4,214		4,275

E-2) n=40 cuños originales, g=25 monedas

h	p(h)	$\hat{n}$	$\hat{n}$.p(h)	$\hat{n}$	$\hat{n}$.p(h)	$\hat{n}$	$\hat{n}$.p(h)
12	0,0001	14,69	0,001	14,69	0,001	13,88	0,001
13	0,0008	16,80	0,013	16,67	0,013	15,91	0,013
14	0,0047	19,27	0,091	18,99	0,089	18,31	0,086
15	0,0201	22,11	0,444	21,78	0,438	21,11	0,424
16	0,0615	25,77	1,585	25,17	1,548	24,56	1,510
17	0,1347	30,20	4,068	29,39	3,959	28,80	3,879
18	0,2112	35,86	7,574	34,80	7,350	34,24	7,231
19	0,2358	43,38	10,229	42,00	9,904	41,46	9,776
20	0,1853	53,86	9,980	52,06	9,647	51,53	9,549
21	0,1004	69,55	6,983	67,11	6,738	66,60	6,687
22	0,0362	95,66	3,463	92,17	3,337	91,66	3,318
23	0,0082	147,80	1,212	142,22	1,166	141,72	1,162
24	0,0010	304,11	0,304	292,28	0,292	291,78	0,292
media:			45,947		44,482		43,929
desv. tipica:			20,143		19,316		19,341

TABLA V (2/2) CALCULO DE LA MEDIA ERGODICA DE LOS RESULTADOS DE ALGUNOS METODOS.

E-3) n=40 cuños originales, g=50 monedas

		LYON-II		GUILBAUD-II		CARCASSONNE	
h	p(h)	$\hat{n}$	$\hat{n}$.p(h)	$\hat{n}$	$\hat{n}$.p(h)	$\hat{n}$	$\hat{n}$.p(h)
21	0,0001	23,98	0,002	24,63	0,002	23,30	0,002
22	0,0009	25,67	0,023	26,19	0,024	24,92	0,022
23	0,0038	27,45	0,104	27,87	0,106	26,69	0,101
24	0,0134	29,35	0,393	29,67	0,398	28,56	0,383
25	0,0367	31,39	1,152	31,61	1,160	30,56	1,122
26	0,0795	33,58	2,670	33,71	2,680	32,71	2,600
27	0,1359	35,94	4,884	35,98	4,890	35,01	4,758
28	0,1836	38,53	7,074	38,46	7,061	37,56	6,896
29	0,1952	41,33	8,068	41,17	8,036	40,30	7,867
30	0,1629	44,40	7,233	44,14	7,190	43,32	7,057
31	0,1062	47,78	5,074	47,42	5,036	46,64	4,953
32	0,0535	51,53	2,757	51,06	2,732	50,31	2,692
33	0,0207	55,70	1,153	55,11	1,141	54,40	1,126
34	0,0061	60,38	0,368	59,67	0,364	58,97	0,360
35	0,0013	65,67	0,085	64,83	0,084	64,17	0,083
36	0,0002	71,70	0,014	70,72	0,014	70,08	0,014
media:			41,056		40,918		40,036
desv. típica			5,965		5,764		5,852

E-4) n=80 cuños originales, g=50 monedas

h	p(h)	$\hat{n}$	$\hat{n}$.p(h)	$\hat{n}$	$\hat{n}$.p(h)	$\hat{n}$	$\hat{n}$.p(h)
28	0,0001	38,53	0,004	38,46	0,004	37,56	0,004
29	0,0004	41,33	0,017	41,17	0,016	40,30	0,016
30	0,0015	44,40	0,067	44,14	0,066	43,32	0,065
31	0,0049	47,78	0,234	47,42	0,232	46,64	0,229
32	0,0136	51,53	0,701	51,06	0,694	50,31	0,684
33	0,0314	55,70	1,749	55,11	1,730	54,40	1,708
34	0,0615	60,38	3,713	59,67	3,670	58,97	3,627
35	0,1016	65,67	6,672	64,83	6,587	64,17	6,520
36	0,1415	71,70	10,146	70,72	10,007	70,08	9,916
37	0,1659	78,65	13,048	77,51	12,859	76,89	12,756
38	0,1632	86,74	14,156	85,42	13,941	84,82	13,843
39	0,1342	96,28	12,921	94,75	12,715	94,17	12,638
40	0,0918	107,71	9,888	105,94	9,725	105,38	9,674
41	0,0519	121,67	6,315	119,61	6,208	119,06	6,179
42	0,0241	139,10	3,352	136,68	3,294	136,14	3,281
43	0,0090	161,49	1,453	158,61	1,427	158,08	1,423
44	0,0027	191,31	0,517	187,83	0,507	187,31	0,506
45	0,0006	233,04	0,140	228,72	0,137	228,21	0,137
46	0,0001	295,60	0,030	290,03	0,029	289,52	0,029
media:			85,121		83,850		83,233
desv. típica:			21,573		21,101		21,145

TABLA VI DESVIACIONES ABSOLUTAS DE LOS RESULTADOS INDIVIDUALES.

Ref.		LYON	GUIL	CARC	MÜLL	BROW	GOOD	MORA
I.	1	3,20	3,33	4,09	3,00	2,35	3,75	3,81
	2	7,16	7,02	7,92	7,00	4,21	8,04	7,64
	3	2,21	1,78	1,11	3,00	5,00	0,83	1,20
	4	2,21	1,78	1,11	2,00	1,43	3,44	0,55
	5	2,21	1,78	1,11	2,00	3,08	0,83	0,55
	6	3,20	3,33	4,09	3,00	6,96	2,89	5,24
	7	2,21	1,78	1,11	2,00	1,25	5,00	1,20
	8	0,73	1,01	1,69	1,00	0,00	1,58	1,69
	9	5,31	5,31	6,12	5,00	3,33	5,71	6,24
	10	5,77	5,17	4,56	6,00	3,08	6,67	3,57
II	1	29,55	27,11	26,60	31,00	25,00	25,63	22,29
	2	13,86	12,06	11,53	14,00	10,00	15,56	9,26
	3	9,80	10,61	11,20	9,00	2,50	13,44	13,25
	4	4,14	5,20	5,76	4,00	2,50	5,38	5,88
	5	13,86	12,06	11,53	15,00	20,00	10,00	7,45
	6	9,80	10,61	11,20	9,00	2,50	13,44	13,25
	7	3,38	2,00	1,46	4,00	2,86	3,18	1,12
	8	9,80	10,61	11,20	9,00	6,67	11,67	11,20
	9	4,14	5,20	5,76	5,00	10,00	2,50	10,72
	10	9,80	10,61	11,80	10,00	15,00	7,31	13,25
III	1	4,40	4,14	3,32	4,00	3,75	4,12	2,59
	2	4,40	4,14	3,32	5,00	7,12	2,86	3,26
	3	1,33	1,17	0,30	1,00	0,48	2,65	0,28
	4	6,58	6,29	7,29	7,00	11,41	6,89	7,98
	5	4,40	4,14	3,32	5,00	13,26	0,54	2,59
	6	8,61	8,39	9,44	9,00	8,59	2,95	9,49
	7	7,78	7,42	6,64	7,00	2,24	8,44	4,94
	8	4,06	4,02	4,99	4,00	5,97	3,51	5,36
	9	1,47	1,54	2,44	1,00	1,72	1,11	2,60
	10	4,06	4,02	4,99	5,00	10,83	2,50	7,49
IV	1	14,33	15,17	15,83	13,00	3,44	19,66	18,31
	2	16,28	14,75	14,17	14,00	1,67	22,63	1,65
	3	8,30	9,28	9,92	9,00	15,53	5,00	12,41
	4	6,74	5,42	4,82	7,00	7,50	6,36	6,28
	5	8,30	9,28	9,08	8,00	7,94	10,77	15,69
	6	6,74	5,42	4,82	7,00	7,50	6,36	6,28
	7	16,28	14,75	14,17	17,00	22,08	12,86	12,27
	8	6,74	5,42	4,82	5,00	2,44	15,00	3,67
	9	14,33	15,17	15,83	14,00	11,94	15,19	17,50
	10	8,30	9,28	9,92	9,00	15,53	5,00	12,41

( ) : menor desviación dentro de cada linea.